第27卷 第4期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 4
2010年08月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Aug. 2010

文章编号:1005-3085(2010)04-0584-09

误差为单位根过程的非参数回归模型均值变点的检测*

齐培艳[1,3]， 田 铮[1,2]， 段西发[1,3]

(1- 西北工业大学应用数学系，西安 710072;
2- 中国科学院遥感应用研究所遥感科学国家重点实验室，北京 100101;
3- 太原科技大学数学系，太原 030024)

摘 要: 基于多分辨分析的小波分析通过检测小波系数的绝对值来检测数据中的变点。本文利用小波方法和极限定理对噪声为单位根过程的非参数回归模型均值变点进行检测。在原假设成立的条件下得到任意尺度上检验的临界值，证明检验的一致性，并且给出小波系数的阈值。在备择假设成立的条件下，给出变点个数、变点位置的相合估计与收敛速度。最后利用模拟研究说明了方法的有效性和实用性。

关键词: 变点；单位根过程；小波变换；收敛速度

分类号: **AMS**(2000) 60E05; 62E20; 62H15 **中图分类号**: O212.1 **文献标识码**: A

1 引言

变点是用来描述函数或信号的突然局部变化，在故障诊断、金融、医学等方面都有大量的应用[1,2]，如故障信号的识别、汇率变点的研究、心电图中的心律检测等。变点分析本质上属于数理统计和非线性时间序列范畴，它引起了国内外众多学者的关注[3,4]。

非线性时间序列可分为平稳时间序列和非平稳时间序列两类，实际问题中很多数据都属于非平稳时间序列，如货币的供应量、物价指数等[5]。因此，对非平稳时间序列的变点研究有很重要的实际意义。值得注意的是单位根过程是常见的非平稳过程，且方差无穷，在金融系统工程中有广泛的应用[6]。

研究变点问题的方法主要有极大似然方法[3]、最小二乘方法[7]、累积和方法[8] 等。小波变换具有自动改变窗长的功能，可以很好地把信号在空间和频率上局部化，这一特性使其成为变点分析中有力的数学工具。Wang[9] 基于小波系数的绝对值对含噪声信号的变点进行检验；Odgen 和 Parzen[10] 利用小波系数的累积和对变点进行检验，Raimondo 和 Tajvidi[11] 应用广义 Pareto 分布对小波系数进行建模，解决了方差有穷的厚尾信号的变点检验问题。

本文研究误差项为单位根过程的非参数回归模型均值变点的检测问题。第2节给出本文要研究的问题。第3节介绍小波变换并对噪声的小波系数进行建模。第4节是本文的主要研究成果。最后用模拟研究说明方法的有效性。

收稿日期: 2007-09-17. **作者简介**: 齐培艳 (1979年8月生)，女，博士. 研究方向：非线性时间序列与信息处理.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (60972150; 10926197)；西北工业大学科技创新基金 (2007KJ01033).

2 本文研究的问题

考虑如下模型

$$Y_i = f(i/T) + \epsilon_i, \quad i = 1, \cdots, T, \tag{1}$$

其中 ϵ_i, $i = 1, \cdots, T$ 是单位根序列 $\epsilon_i = \epsilon_{i-1} + u_i$，函数 f 及 u_i 分别满足以下假设：

假设1 $f(x)$ 为未知非参数回归函数，变点个数、位置及跳跃度都是未知的，而变点个数的上限 m 是已知的。

假设2 $u_i = \varphi(L)e_i = \Sigma_{j=1}^{\infty}\varphi_j e_{i-j}$，其中 $\{\varphi_j\}$ 满足 $\Sigma_{j=0}^{\infty} j|\varphi_j| < \infty$，$\{e_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 是独立同分布随机变量序列，满足 $E(e_i) = 0$，$D(e_i) = \sigma^2 < \infty$。

本文研究如下假设检验问题：

H_0： f 是光滑函数(在区间[0,1]上至少连续可微)；

$H_1(m)$： f 至少有1个，最多有 m 个跳跃点，除此以外，f 是光滑的。

3 小波变换与中心极限定理

3.1 小波变换的正则性

令 $\psi(u)$ 是一个小波母函数，通过伸缩和平移变换，得到一列小波基函数

$$\psi_{j,k}(u) = 2^{j/2}\psi(2^j u - k), \quad j \in N, \quad k \in Z.$$

函数 f 的连续小波变换如下

$$\int f(u)\psi_{j,k}(u)\mathrm{d}u, \quad j \in N, \quad k \in Z.$$

当给定离散数据集 $Y = (Y_1, \cdots, Y_T)$ 时，可利用与连续小波变换相对应的离散小波变换得到 Y 的经验小波系数

$$w'_{j,k} = w'_{j,k}(f) + w'_{j,k}(\epsilon). \tag{2}$$

考虑到经验小波的 L^2-范数后，Härdle等人[12]用以下和式来近似连续小波变换的积分式

$$w'_{j,k}(f) = \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{i=1}^{T}\psi_{j,k}(i/T)f(i/T), \quad w'_{j,k}(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{i=1}^{T}\psi_{j,k}(i/T)\epsilon_i. \tag{3}$$

Mallat[13]提出的塔型算法可快速计算上述离散小波变换

$$(w'_{j,k}) = WY,$$

其中 W 是依赖于小波基的一个正交矩阵，指标 j 被称为多分辨水平(对应着频率 $\omega = 2^{-j}$)，满足 $0 \le j \le J$ 且 $2^{J+1} = T$。指标 $k = 0, 1, \cdots, 2^j - 1$ 称为时间(空间)参数(对应着时间位置 $t = k/2^j$)。

对函数 f 进行小波变换得到的经验小波系数有如下基本性质[14]：

1) 在原假设 H_0 下，f 是可微的，对所有的分辨水平 $j \ge j_0 = 3$ 以及所有的 $k = 0, 1, \cdots, 2^j - 1$，有 $|w'_{j,k}(f)| \le c_1(T2^{-3j})^{\frac{1}{2}}$。

2) 在备择假设 H_1 下，若存在一个点 $x \in [k/2^j, (k+1)/2^j)$ 并且 x 是 f 的跳跃点，则有 $|w'_{j,k}(f)| \ge c_2(T2^{-j})^{\frac{1}{2}}$。

常数 c_1, c_2 仅仅依赖于函数 f，不会影响检验统计量的设定及检验结果，为叙述方便，本文假设 $c_1 = c_2 = 1$。以上两条性质表明，使得小波系数 $w'_{j,k}(f)$ 的绝对值达到最大的点正好对应着函数 f 的变点。

3.2 小波变换与中心极限定理

Donoho 和 Johnstone[15] 用全局小波阈值对小波系数进行压缩以达到函数去噪的目的，自此中心极限定理在小波统计建模中得到广泛的应用，见 Härdle 等[12]。本节以 Haar 小波为例说明极限定理在非平稳厚尾时间序列的小波系数统计建模中的应用。

Haar 小波定义为

$$\psi(x) = I_{[0,1/2)}(x) - I_{[1/2,1]}(x),$$

其基函数 $\psi_{j,k}(x)$ 的支撑是二进区间 $I_k = [k/2^j, (k+1)/2^j)$，且在此区间中 i/T 的个数为 $T/2^j$，因此有

$$w'_{j,k}(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i \in I_k} 2^{j/2}(\pm)\epsilon_i \stackrel{d}{=} \frac{1}{\sqrt{T/2^j}} \sum_{i \in I_k} \epsilon_i, \tag{4}$$

应注意 ϵ_i 服从单位根过程，方差无穷，故利用以下结果对噪声的小波系数进行建模[6]。

引理1 设平稳过程 $\{u_i\}$ 满足假设2，令 $\xi_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_i$，$i = 1, 2, \cdots, T$。若 $\xi_0 = 0$，那么

$$T^{-3/2} \Sigma_{i=1}^{T} \xi_{i-1} \Rightarrow \sigma\varphi(1) \int_0^1 W(r)\mathrm{d}r \sim N\Big(0, \frac{1}{3}\varphi(1)\sigma^2\Big),$$

其中 $\varphi(1) = \Sigma_{j=0}^{\infty} \varphi_j$。

为叙述方便，在给定的多分辨水平 j 上，令

$$w_{j,k} = \frac{1}{T/2^j} w'_{j,k},$$

即

$$w_{j,k}(f) = \frac{1}{T^{3/2}/2^j} \sum_{i=1}^{T} \psi_{j,k}(i/T) f(i/T), \quad w_{j,k}(\epsilon) = \frac{1}{T^{3/2}/2^j} \sum_{i=1}^{T} \psi_{j,k}(i/T)\epsilon_i. \tag{5}$$

由引理1可得，当 $T/2^j \longrightarrow \infty$ 时，

$$w_{j,k}(\epsilon) \Rightarrow \sigma\varphi(1) \int_0^1 W(r)\mathrm{d}r \sim N\Big(0, \frac{1}{3}\varphi(1)\sigma^2\Big). \tag{6}$$

4 主要结果

4.1 检验统计量的构造

本节旨在构造检验统计量并确定小波系数的阈值。由节3.1中经验小波系数的基本性质可得如下定理。

定理1 在水平 j 上，对 $|w_{j,k}|$ 进行排序得到 $|w_{j,(1)}| > |w_{j,(2)}| > \cdots > |w_{j,(2^j)}|$，令 $v_T = 2^{-j/2}T^{-1/2}$，在原假设 H_0 成立时，若多分辨水平 $j = j(T)$ 满足

$$2^j \asymp \Big(\frac{T}{\log T}\Big)^{\delta}, \quad 1 < \delta < 2, \tag{7}$$

则对任意的常数 $m \geq 1$，当 $T \longrightarrow \infty$ 时，有

$$P\big(|w_{j,(m)}| > v_T\big) \longrightarrow 1. \tag{8}$$

关系式 $a_T \asymp b_T$ 表示，对于充分大的 T，存在正常数 d_1 和 d_2，使得 $d_1 b_T \le a_T \le d_2 b_T$ 成立。

证明　只考虑 $m=1$ 的情况，$m>1$ 时类似处理。我们证明在多分辨水平 j 下，当 $T \longrightarrow \infty$ 时

$$P\big(|w_{j,(1)}| \le v_T\big) \longrightarrow 0. \tag{9}$$

在原假设成立时，由性质1) 可知

$$|w_{j,k}(f)| = \left|\frac{1}{T/2^j} w'_{j,k}(f)\right| \le \frac{1}{T/2^j}(T2^{-3j})^{\frac{1}{2}} = v_T.$$

因此 $|w_{j,k}| \ge |w_{j,k}(\epsilon)| - v_T$，从而

$$P\big(|w_{j,(m)}| > v_T\big) \ge P\big(|w_{j,(m)}(\epsilon)| > 2v_T\big) = 1 - P\big(|w_{j,(m)}(\epsilon)| \le 2v_T\big),$$

而

$$\begin{aligned} P\big(|w_{j,(1)}(\epsilon)| < 2v_T\big) &= P\big(\max_k |w_{j,k}(\epsilon)| < 2v_T\big) \\ &< P\big(|w_{j,k}(\epsilon)| < 2v_T\big) = \lim_{T/2^j \to \infty} \int_{-2v_T}^{2v_T} p(x)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

其中 $p(x)$ 是 $N(0, \frac{1}{3}\varphi(1)\sigma^2)$ 的密度函数。而当多分辨水平满足条件 (7) 时，$v_T = 2^{-j/2}T^{-1/2} \to 0(T \to \infty)$，所以有 $P(|w_{j,(m)}| < v_T) \to 0$，也即 $P(|w_{j,(m)}| > v_T) \to 1$。

考虑如下检验统计量

$$N_i = |w_{j,(i)}| - |w_{j,(m+1)}|, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{10}$$

在原假设 H_0 成立时，由定理1可得，$N_i < |w_{j,(i)}| - v_T$，$i = 1, 2, \cdots, m$ 是依概率1成立的，因此定理1可用来得到 N_i 的临界值，即如下定理2。

定理2　令 $0 < \beta < 1$

$$l_i = \sqrt{\frac{\varphi(1)}{3}}\sigma\sqrt{-2\log\frac{\beta}{(m-i+1)m}}, \tag{11}$$

$$R_T(\beta) = \cup_{i=1,2,\cdots,m}\{N_i > l_i\},$$

在原假设 H_0 成立下，若多分辨水平 j 满足 (7) 式，则

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} P\{R_T(\beta)\} \le \beta. \tag{12}$$

证明　令 $M_T = \{|w_{j,m+1}| > v_T\}$，则有

$$P\big(N_i > x \,|\, M_T\big) \le P\big(w_{j,(i)} - v_T > x \,|\, M_T\big), \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

不妨假设 $|w_{j,(i)}| \ge |w_{j,(i+1)}| \ge \cdots \ge |w_{j,(m)}|$ 在没有排序之前为 $|w_{j,i}|, |w_{j,i+1}|, \cdots, |w_{j,m}|$，则有

$$\begin{aligned} P\big(|w_{j,(i)}| - v_T > x \mid M_T\big) &= P\Big(\max_{k=i,\cdots,m} |w_{j,k}| - v_T > x \mid M_T\Big) \\ &\le \sum_{k=i}^{m} P\big(|w_{j,k}| - v_T > x \mid M_T\big). \end{aligned}$$

由定理1，有

$$P\big(|w_{j,k}|-v_T>x\mid M_T\big)=P\big(|w_{j,k}|-v_T>x\big)\le P\big(|w_{j,k}(\epsilon)|>x\big).$$

由正态分布的尾概率估计公式可知

$$P\big(|w_{j,k}(\epsilon)|>x\big)\le\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma\sqrt{\varphi(1)}}{\sqrt{3}x}\exp\Big\{-\frac{3x^2}{2\sigma^2\varphi(1)}\Big\},$$

所以

$$P\big(N_i>x\mid M_T\big)\le\frac{2}{\sqrt{2\pi}}(m-i+1)\frac{\sigma\sqrt{\varphi(1)}}{\sqrt{3}x}\exp\Big\{-\frac{3x^2}{2\sigma^2\varphi(1)}\Big\},\quad i=1,2,\cdots,m.$$

取 $x=l_i$，则当 $T\longrightarrow\infty$ 且 β 很小时

$$\begin{aligned}P\big(R_T(\beta)\big)&\le\sum_{i=1}^{m}P(N_i>x\mid M_T)\\&\le\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{m(m-i+1)}{\sqrt{-2\log\frac{\beta}{(m-i+1)m}}}\frac{\beta}{(m-i+1)m}\le\beta.\end{aligned}\tag{13}$$

定理证毕。

注1 如果所讨论模型的噪声项具有尺度因子 $\lambda>0$，即 $Y_i=f(i/T)+\lambda\epsilon_i$，$i=1,\cdots,T$，则(11)式中的临界值应为 λl_i。由定理的证明可得，临界值 l_i 实际上是由 $w_{j,k}(\varepsilon)$ 的分布决定的，也即噪声的不同将导致不同的临界值。

注2 关于多分辨水平 j 的选定可以比较各个多分辨水平上的 $\max_k|w_{j,k}|$ 与

$$C_T=\lambda\sqrt{2\delta}\frac{T^{\delta-1}}{(\log T)^{\delta-1/2}},$$

当函数不含变点时 $\max_k|w_{j,k}|\le C_T$，当函数含有变点时，$\max_k|w_{j,k}|\ge C_T$ (可参见文献[9])。这里 δ 是大于1小于2的常数。

由定理1和定理2可得如下检验步骤:

步骤1 选定多分辨水平 j，对数据做离散小波变换得到经验小波系数，并进行排序 $|w_{j,(1)}|>|w_{j,(2)}|>\cdots>|w_{j,(2^j)}|$。

步骤2 令 $N_1=|w_{j,(1)}|-|w_{j,(m+1)}|$，$i=1,2,\cdots,m$。当检验统计量 $N_1\le l_1$ 时，接收原假设，即函数 f 为光滑函数；若 $N_1>l_1$，则进行下一步。

步骤3 比较 N_i 与 l_i，$i=2,\cdots,m$，若存在常数 p 使得 $N_p>l_p$ 且 $N_{p+1}\le l_{p+1}$，$p\le m$，则认为函数 f 含有 p 个变点。

若由以上步骤已知函数含有 p 个变点，则 $C=l_p+w_{j,(m+1)}$ 为本文选定的小波系数阈值，即大于此阈值的小波系数对应着函数的跳跃点。

4.2 检验的一致性

本节研究在备择假设 H_1 成立时，变点检验的一致性。

定理3 令 $R_T(\beta)$ 是定理2所定义，在备择假设 $H_1(m)$ 成立时，若多分辨水平 j 满足(7)式，则

$$\lim_{T\longrightarrow\infty}P\{R_T(\beta)\}=1.\tag{14}$$

证明　只考虑$m=1$的情形，$m>1$类似可得。令

$$B_T=\Big\{\max_{k=0,1,\cdots,2^j}|w_{j,k}(\epsilon)|\le x_T\Big\},$$

其中

$$x_T=T^w,\quad 0<w<\frac{1}{2}\delta-\frac{1}{2}.$$

注意到在备择假设$H_1(1)$下，存在一个指标k_1，满足$|w_{j,k_1}(f)|\ge(2^{-j})^{\frac{1}{2}}T^{-1/2}2^j$，当$k\ne k_1$时，$|w_{j,k}(f)|\le(2^{-3j})^{\frac{1}{2}}T^{-1/2}2^j$，所以由(7)式可得

$$|w_{j,k_1}|\ge|w_{j,k_1}(f)|-|w_{j,k_1}(\epsilon)|\ge|w_{j,k_1}(f)|-x_T\ge\frac{T^{\frac{\delta-1}{2}}}{(\log T)^{\frac{\delta}{2}}}\Big(1+o\Big(\frac{T^{\frac{\delta-1}{2}}}{(\log T)^{\frac{\delta}{2}}}\Big)\Big),$$

$$|w_{j,k}|\le|w_{j,k}(f)|+|w_{j,k}(\epsilon)|\le|w_{j,k}(f)|+x_T\le\frac{(\log T)^{\frac{\delta}{2}}}{T^{(1+\delta)/2}}+x_T=O(x_T),\quad k\ne k_1.$$

对充分大的T，有

$$|w_{j,(1)}|=\max_k|w_{j,k}|=|w_{j,k_1}|\ge\frac{T^{\frac{\delta-1}{2}}}{(\log T)^{\frac{\delta}{2}}}\Big(1+o\Big(\frac{T^{\frac{\delta-1}{2}}}{(\log T)^{\frac{\delta}{2}}}\Big)\Big),$$

存在$k\ne k_1$，使得$|w_{j,(2)}|=|w_{j,k}|$，所以

$$N_1=|w_{j,(1)}|-|w_{j,(2)}|\ge\frac{T^{\frac{\delta-1}{2}}}{(\log T)^{\frac{\delta}{2}}}\Big(1+o\Big(\frac{T^{\frac{\delta-1}{2}}}{(\log T)^{\frac{\delta}{2}}}\Big)\Big).$$

因此若证明，当$T\longrightarrow\infty$时

$$P(B_T)\longrightarrow 1,\tag{15}$$

则可得$N_1\stackrel{P}{\longrightarrow}\infty$，也即定理成立。由于当$j$满足(7)式时，

$$\begin{aligned}P(B_T^c)&=P\Big(\max_{k=0,1,\cdots,2^j-1}|w_{j,k}|>x_T\Big)\le\sum_{k=0}^{2^j-1}P\big(|w_{j,k}(\epsilon)|>x_T\big)\\&\le 2^j\times\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{\sigma\sqrt{\varphi(1)}}{\sqrt{3}x_T}\exp\Big\{-\frac{3{x_T}^2}{2\sigma^2\varphi(1)}\Big\}\\&=C\times T^{\delta-w}(\log T)^{-\delta}\exp\Big\{-\frac{3T^{2w}}{2\sigma^2\varphi(1)}\Big\}\to 0,\end{aligned}\tag{16}$$

所以当$T\longrightarrow\infty$时，$P(B_T)\longrightarrow 1$，从而$N_1\stackrel{P}{\longrightarrow}\infty$。定理证毕。

4.3 变点位置的估计及收敛速度

令i_1为函数f的变点个数，变点位置依次为$0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_{i_1}$，$1\le i_1\le m$，取$\hat{i}=\sup(i:1\le i\le m,T_i>c_i)$，$k_1<k_2<\cdots<k_{\hat{i}}$为$|w_{j,(1)}|,\cdots,|w_{j,(\hat{i})}|$在未排序时所对应的指标，不妨设$|w_{j,k_1}|>|w_{j,k_2}|>\cdots>|w_{j,k_{\hat{i}}}|$，并令$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_{\hat{i}})=(k_1/2^j,k_2/2^j,\cdots,k_{\hat{i}}/2^j)$。由定理3可得如下推论。

推论1　在定理3的条件下，当$T\longrightarrow\infty$时，有

$$P(\hat{i}=i_1)=1,\quad\sum_{i=1}^{\hat{i}}(\hat{\theta}_i-\theta_i)^2=O_P(2^{-2j}).$$

由推论1及(7)可知，$\hat{\theta}_i-\theta_i=O(2^{-j})=O(T^{-\delta}(\log T)^{\delta})$，即收敛速度为$T^{-\delta}(\log T)^{\delta}$。

5 模拟研究

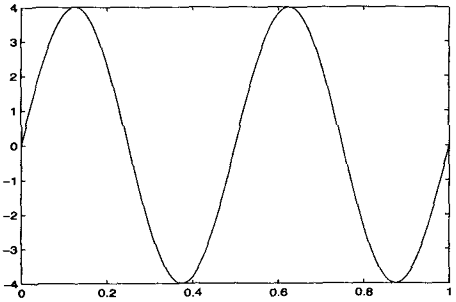
本节用两个例子来说明小波在变点检测中的应用。

例1 考虑无变点的模型

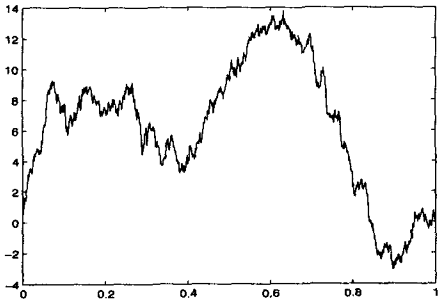
$$Y_i = f(i/T) + \lambda\epsilon_i, \quad i = 1, 2, \cdots, T,$$

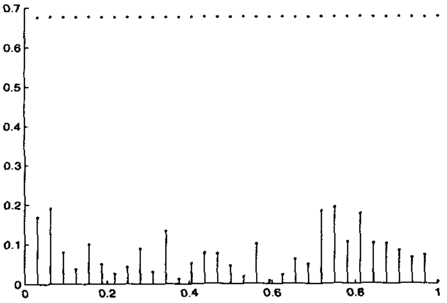
其中 $f(x)$ 为Heavisine函数，即 $f(x) = 4\sin(4\pi x)$，见图1(a)。图1(b)是噪声过程为 $\epsilon_i = \epsilon_{i-1} + u_i$，$u_i \sim N(0,1)$，$i = 1, 2, \cdots, T$ 时 Y_i 的显示图，其中 $\lambda = 0.25$。

取样本容量 $T = 2^{10}$，小波函数为Haar小波，$m = 3$，检验水平为 $\beta = 0.05$，取 $\delta = 1.3$，由注2选定多分辨水平 $j = 5$，在此水平上对图1(b)中的 Y_i 进行小波分解，得到的结果为图1(c)。由图可知，所有的小波系数都小于本文给出的阈值，即检验的结果是接受原假设：函数 f 为光滑函数。



(a)





(b) (c)

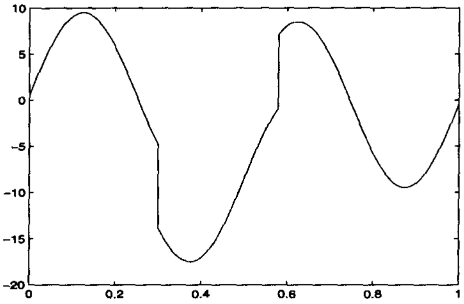
图1: (a) $f(x) = 4\sin(4\pi x)$, (b) $Y_i = f(i/T) + \lambda\epsilon_i$, $\lambda = 0.25$, ϵ_i, $i = 1, 2, \cdots, T$ 为 $\epsilon_i = \epsilon_{i-1} + u_i$, $u_i \sim N(0,1), i = 1, 2, \cdots, T$, (c) 小波系数，$j = 5$，$(\cdot)$ 线表示本文的阈值

例2 考虑含有两个变点的模型

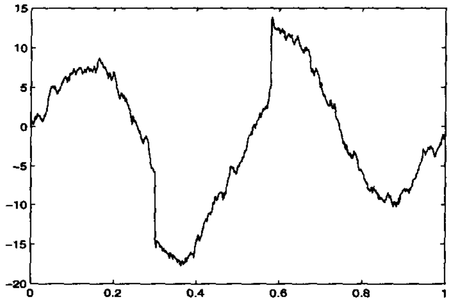
$$Y_i = f(i/T) + \lambda\epsilon_i, \quad i = 1, 2, \cdots, T,$$

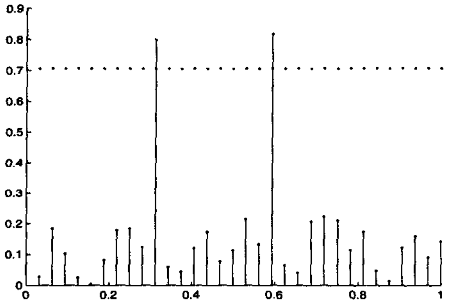
其中 $f(x)$ 为含变点的Heavisine函数，即 $f(x) = 9\sin(4\pi x) - 4.5\text{sign}(x-0.3) - 4\text{sign}(0.58-x)$，见图2(a)。图2(b)是噪声过程为 $\epsilon_i = \epsilon_{i-1} + u_i$，$u_i \sim N(0,1)$，$i = 1, 2, \cdots, T$ 时 Y_i 的显示图，其中 $\lambda = 0.25$。

取样本容量$T = 2^{10}$，小波函数为Haar小波，$m = 5$，检验水平为$\beta = 0.05$。取$\delta = 1.3$，由注2可得只有多分辨水平$j = 5$时才满足要求，在此水平上对图2(b)中的Y_i进行小波分解，得到的结果为图2(c)。从图中可以看出，仅有两个小波系数都大于本文给出的阈值，即检验的结果是接受两个变点的备择假设，与原函数吻合。同时可得到变点位置的估计值$\widehat{\theta_1} = 0.3022$和$\widehat{\theta_2} = 0.5906$。



(a)





(b)　　(c)

图 2:　(a) $f(x) = 9\sin(4\pi x) - 4.5\text{sign}(x - 0.3) - 4\text{sign}(0.58 - x)$,　(b) $Y_i = f(i/T) + \lambda\epsilon_i$, $\lambda = 0.25$, ϵ_i, $i = 1, 2, \cdots, T$ 为 $\epsilon_i = \epsilon_{i-1} + u_i$, $u_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, 2, \cdots, T$,　(c) 小波系数，$j = 5$, $(\cdot)$ 线表示本文的阈值

由以上两个例子我们可以看出，利用本文的方法，可以正确判断出变点的个数并准确的估计变点发生的时刻。

参考文献：

[1] Krishnaiah P R, Miao B Q. Review about estimation of change-point[J]. Handbook of Statistics, 1988, 7: 375-402

[2] 谭常春. 变点问题的统计推断及其在金融中的应用[D]. 博士论文，合肥：中国科学技术大学，2007
Tan C C. Statistical inference in change point and its application in finance[D]. Ph.D. Dissertation, Hefei: University of Science and Technology of China, 2007

[3] Csörgo M, Horváth L. Limit Theorems in Change-point Analysis[M]. West Sussex: Jhon Wiley and Sons Ltd, 1997

[4] Miao B Q, Subramanyam K. Some methods to estimate the number and location of slope change points[R]. Technical Report No.1988, 8, Center for Multivariate Analysis, University of Pittsburgh

[5] Wikstrom C, Albano C, Eriksson L, *et al.* Multivariate process and quality monitoring applied to an electrolysis process part II[J]. Multivariate Time-series Analysis of Lagged Latent Variables, Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 1998: 233-240

[6] 陈懋祖. 高等时间序列计量经济学[M]. 上海：上海科学技术出版社，1998
Chen M Z. Advanced Time Series Econometrics[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1998

[7] Bai J. Least squares estimation of a shift in linear processes[J]. J Time Ser Anal, 1994, 15: 453-472

[8] Kokoszka P S, Leipus R. Change point in the mean of dependent observations[J]. Statistics and Probability Letters, 1998, 40: 385-393

[9] Wang Y. Jump and sharp cusp detection by wavelet[J]. Biometrika, 1995, 82: 385-397

[10] Odgen T, Parzen O. Change-point approach to data analytic thresholding[J]. Statist Comput, 1996, 6: 93-99

[11] Raimondo M, Tajvidi N. A peaks over threshold model for change-point detection by wavelet[J]. Statistica Sinica, 2004, 14: 395-412

[12] Härdle W, Kerkyacharian G, Picard D, *et al.* Wavelets approximation and statistical application[J]. Lecture Notes in Statistics, 1998

[13] Mallat S. A theory for multi-resolution signal decomposition[J]. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell, 1989, 11: 674-693

[14] Raimondo M. Minimax estimation of sharp change points[J]. The Annals of Statistics, 1998, 26(4): 1379-1397

[15] Donoho D, Johnstone I. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, 81: 425-455

Detecting Change-points in Mean of Nonparametric Regression Models with Unit-root Errors

QI Pei-yan[1,3], TIAN Zheng[1,2], DUAN Xi-fa[1,3]

(1- Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072;
2- National Key Laboratory of Remote Sensing, Institute of Remote Sensing Applications
Chinese Academy of Science, Beijing 100101; 3- Department of Mathematics,
Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024)

Abstract: Based on the theory of multi-resolution analysis, the change-points in data can be detected by checking the absolute value of wavelet coefficients. In this paper, we combine wavelet methods and the extreme value theory to establish an approach to test the presence of an arbitrary number of discontinuities for an unknown function, based on date observed with unit-root noise. If the null hypothesis holds, we obtain critical values at any scale and prove the consistency of wavelet detection. If the alternative hypothesis holds, we show that the estimation of the numbers and location of change points are consistent. Simulation study supports our method.

Keywords: change-point; unit-root process; wavelet transformation; the rate of convergence

Received: 17 Sep 2007. **Accepted:** 29 Jan 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (60972150; 10926197); the Science and Technology Innovation Foundation of Northwestern Polytechnical University (2007KJ01033).